4) S. H. Glarum : J. Chem. Phys. 33 (1960), 1371

Kinetic Ising Model

松 原 武 生 (京大理)
吉 光 浩 二 (〃)

§ 1. Kinetic Ising Model の意義

二次相転移の Mathematical Model としての Ising Model は次のような点で意味を持っている。

① Exact solution が存在する。(二次元)

② Mathermatical structure が透明である。(代数的)

③ 有効性と限界。(物理現象の本質をとらえている。)

同様に相転移を含む系の Dynamics の Mathematical Model としての "Kinetic Ising Model" も上の点で意味を持ち得る。すなわち,

① 相転移の起る model で exact solution を求めることは出来ないか。
(一次元 Glauber Model は exact であるが有限温度で相転移が起らない。)

② Mathematical structure が透明で代数的処理が可能である。

③ 有効性。次のような system で有用である。

(a) 二元合金

(b) 強誘電体 (KDP, $NaNO_2$)

(c) 生体高分子 (cooperative reaction)

このような点から "Kinetic Ising Model" の一般的 Formulation を考える。更にその 2, 3 の特別な場合を考える。

§ 2. Formulation

スピン系の配置を $\alpha \equiv \{\sigma\}$ で表わし, 分布関数を $f(\alpha, t)$ とする。すべての配置についての和を

Kinetic Ising Model

$$\sum_{\{\sigma\}} = \sum_{\alpha} \simeq \int \cdots\cdots\cdots d\alpha$$

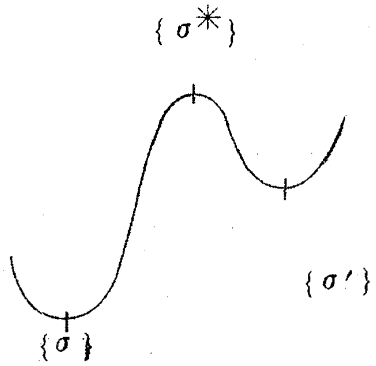
等と略記する。外場Fの中で $\{\sigma\} = \alpha$ なる配置にあるときの系のエネルギーを

$$U(\{\sigma\}) = E(\{\sigma\}) - \mu(\{\sigma\})F \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

とする。$E(\{\sigma\})$ は外場がないときの相互作用のエネルギー，$\mu(\{\sigma\})$ は系の分極を与える物理量である。単位時間に $\{\sigma\} \rightarrow \{\sigma'\}$ なる転移の起る確をW $(\{\sigma\}|\{\sigma'\})$ とすると detailed balance の条件から

$$W(\{\sigma\}|\{\sigma'\})\,e^{-\frac{U(\{\sigma\})}{kT}} = W(\{\sigma'\}|\{\sigma\})\,e^{-\frac{U(\{\sigma'\})}{kT}} \quad \cdots\cdots (2)$$

が成立つ。例えばこの条件を満す W として



$$W(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) \propto e^{-\frac{U^{*}-U(\{\sigma\})}{kT}}$$

$$W(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) \propto e^{-\frac{U^{*}-U(\{\sigma'\})}{kT}} \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

の形を仮定すると，Fが充分小さいとき，その一次まで考慮して

$$W(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) = W(\{\sigma\}|\{\sigma'\})\left[1 - \frac{\mu(\{\sigma\})F}{kT} + \cdots\cdots\right] \cdots\cdots (4)$$

の形に展開できる。

f (α, t) に対する基礎方程式は

$$\frac{\partial f(\{\sigma\}, t)}{\partial t} = -f(\{\sigma\}, t)\sum_{\{\sigma'\}} W(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) + \sum_{\{\sigma'\}} W(\{\sigma'\}|\{\sigma\})\,f(\{\sigma'\}, t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

外場がないときの平衡分布を $f_0(\{\sigma\})$ として

$$f(\{\sigma\},t) = f_0(\{\sigma\}) + g(\{\sigma\},t) \quad \cdots\cdots (6)$$

とおいて，g を F について一次の量とみなす。F に関して二次以上の量を省くと，

$$\frac{\partial g(\{\sigma\},t)}{\partial t} = -g(\{\sigma\},t)\sum_{\{\sigma'\}} W_0(\{\sigma\}|\{\sigma'\})$$

$$+\sum_{\{\sigma'\}} W_0(\{\sigma'\}|\{\sigma\})\, g(\{\sigma'\},t) + f_0(\{\sigma\})\sum_{\{\sigma'\}} W_0(\{\sigma\}|\{\sigma'\})\frac{\mu(\{\sigma\})F}{KT}$$

$$-\sum_{\{\sigma'\}} W_0(\{\sigma'\}|\{\sigma\})\frac{\mu(\{\sigma'\})F}{kT} f_0(\{\sigma'\}) \quad \cdots\cdots (7)$$

今 operator 、

$$D(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) = \delta_{\{\sigma\}\{\sigma'\}}\sum_{\{\sigma''\}} W_0(\{\sigma\}|\{\sigma''\}) - W_0(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) \cdots (8)$$

を定義すると(7) の右辺の才一行は

$$-\sum_{\{\sigma'\}} g(\{\sigma'\},t)\, D(\{\sigma'\}|\{\sigma\})$$

とかけ，また(7) の右辺の才二行は

$$\frac{F}{kT}\sum_{\{\sigma'\}} f_0(\{\sigma'\})\,\mu(\{\sigma'\})\, D(\{\sigma'\}|\{\sigma\})$$

と書くことが出来る。故に(7) は

$$\frac{\partial g(\{\sigma\},t)}{\partial t} = -\sum_{\{\sigma'\}} g(\{\sigma'\},t)\, D(\{\sigma'\}|\{\sigma\})$$

$$+\frac{F}{kT}\sum_{\{\sigma'\}} f_0(\{\sigma'\})\,\mu(\{\sigma'\})\, D(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) \quad \cdots\cdots (9)$$

と変形出来る。

そこでまづ次の左固有値問題を解く

$$\sum_{\{\sigma'\}} \varphi_n(\{\sigma'\})\, D(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) = \lambda_n \varphi_n(\{\sigma\}) \quad \cdots\cdots (10)$$

λ_n, $\varphi_n(\{\sigma\})$ は完全系をつくるものと仮定して

$$\left.\begin{aligned} g(\{\sigma\},t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(\{\sigma\}) \\ \sum_{\{\sigma'\}} f_0(\{\sigma'\})\, \mu(\{\sigma'\})\, D(\{\sigma'\}|\{\sigma\}) &= \sum_{n=1}^{\infty} kT\, c_n \varphi_n(\{\sigma\}) \end{aligned}\right\} \cdots (11)$$

のように展開すると，(11) を (9) に入れて，

$$\frac{d a_n(t)}{dt} = -\lambda_n a_n + F(t) c_n \quad \cdots\cdots (12)$$

となる。$t=-\infty$ で $F(-\infty)=0$ で熱平行にあったとすると，$a_n(-\infty) = 0$

$$a_n(t) = c_n \int_{-\infty}^{t} F(s)\, e^{-\lambda_n(t-s)}\, ds \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\therefore f(\{\sigma\},t) = f_0(\{\sigma\}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{t} F(s)\, e^{\lambda_n(s-t)} \varphi_n(\{\sigma\})\, ds \quad \cdots\cdots (14)$$

が得られる。分極は

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{\{\sigma\}} f(\{\sigma\},t)\, \mu(\{\sigma\}) \\ &= \sum_{\{\sigma\}} g(\{\sigma\},t)\, \mu(\{\sigma\}) \quad \cdots\cdots (15) \end{aligned}$$

そこで

$$\sum_{\{\sigma\}} \varphi_n(\{\sigma\})\, \mu(\{\sigma\}) \equiv \mu_n \quad \cdots\cdots (16)$$

$$p_n = c_n \mu_n \quad \cdots\cdots (17)$$

と定義すると

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} F(s) \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-\lambda_n(t-s)} ds \quad \cdots\cdots (18)$$

これは正に緩和関数である。

$$F = E_0 e^{i\omega t}$$

のとき，$\tau_n = 1/\lambda_n$ とおいて

$$P(t) = E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \tau_n}{1+i\omega\tau_n} \quad \cdots\cdots (19)$$

p_n の意味を知るために，$f_0(\{\sigma\})\mu(\{\sigma\})$ を $\varphi_n(\{\sigma\})$ で展開する

$$f_0(\{\sigma\})\mu(\{\sigma\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{*} \varphi_n(\{\sigma\}) + f_0(\{\sigma\})\Big[\sum_{\{\sigma'\}} f_0(\{\sigma'\})\mu(\{\sigma'\})\Big] \quad \cdots\cdots (20)$$

最後の項は永久分極 $\sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\})\mu(\{\sigma\}) \neq 0$ があるときの場合も含めてつけ加えてある。右から $D(\{\sigma\}|\{\sigma''\})$ を operate して (11) の才二式と比較すると直ちに

$$kT c_n = \lambda_n \mu_n^{*}$$

$$\therefore c_n = \frac{\mu_n^{*}}{kT} \cdot \frac{1}{\tau_n}$$

$$\therefore p_n \tau_n = \mu_n c_n \tau_n = \frac{\mu_n \mu_n^{*}}{kT} \quad \cdots\cdots (21)$$

又 (20) に $\mu(\{\sigma\})$ をかけて $\{\sigma\}$ について和をとると，(16) を用いて

$$\sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\})[\mu(\{\sigma\})]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \mu_n^* + (\sum_{\{\sigma\}} f_0(\sigma\})\mu(\{\sigma\}))^2$$

$$\therefore \sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\})[\mu(\{\sigma\})]^2 - (\sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma\})\mu(\{\sigma\}))^2$$

$$= \langle \mu^2(\{\sigma\}) \rangle - \langle \mu(\{\sigma\}) \rangle^2 \equiv \langle M^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \mu_n^* \quad \cdots\cdots (22)$$

そこで

$$\beta_n \equiv \frac{\mu_n \mu_n^*}{\langle M^2 \rangle} \quad , \quad \sum_n \beta_n = 1 \quad \cdots\cdots (23)$$

を定義すると

$$P(t) = \frac{\langle M^2 \rangle}{kT} E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1+i\omega\tau_n} \quad \cdots\cdots (24)$$

$$= \frac{\langle M^2 \rangle}{kT} E_0 e^{i\omega t} \int \frac{H(\tau)}{1+i\omega\tau} d\tau$$

$$H(\tau) \equiv \sum_n \beta_n \delta(\tau - \tau_n)$$

λ_n の分布の母関数は次で与えられる。

$$\Phi(z) \equiv \langle M^2 \rangle \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\lambda_n z} \quad \cdots\cdots (25)$$

定義 (16), (20), (10) を用いて

$$\Phi(z) = \sum_{\{\sigma'\}} \sum_{\{\sigma\}} f_0(\{\sigma'\})\mu(\sigma'\})(e^{-zD})(\{\sigma'\}|\{\sigma\})\mu(\{\sigma\}) \quad \cdots\cdots (26)$$

となる。

§3 Reformulation

前節の結果を，すべての配置 $\{\sigma\}$ を element に持つ横ベクトル，縦ベクト

ル，マトリックスを定義してまとめなおす。

f（{σ}，t）を成分とする横ベクトル

$$\left(f_{\alpha_1}(t),\ f_{\alpha_2}(t),\ \cdots\cdots\ f_{\alpha_N}(t)\right) \equiv \boldsymbol{f}(t)$$

$f_0(\{\sigma\})$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{f}_0$

$g(\{\sigma\}, t)$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{g}(t)$

$\varphi_n(\{\sigma\})$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\phi}_n$

$D(\{\sigma\}|\{\sigma'\})$ を成分とするマトリックス $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{D}$

$\mu(\{\sigma\}|\{\sigma'\}) = \delta_{\{\sigma\}\{\sigma'\}}\,\mu(\{\sigma\})$ 〃 $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\mu}$

(9) 式

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}(t)}{\partial t} = -\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{F}{kT}\boldsymbol{f}_0\cdot(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{D})$$

(10) 式

$$\boldsymbol{\phi}_n\cdot\boldsymbol{D} = \lambda_n\,\boldsymbol{\phi}_n$$

(11) 式

$$\boldsymbol{g}(t) = \sum_n a_n(t)\,\boldsymbol{\phi}_n$$

$$\boldsymbol{f}_0\cdot(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{D}) = \sum_n kT\,c_n\,\boldsymbol{\phi}_n$$

すべての成分が１の縦ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とすると

(15) 式

$$P(t) = (\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e})$$

(16) 式

$$\mu_n \equiv (\boldsymbol{\phi}_n\cdot\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e})$$

(14) 式

Kinetic Ising Model

$$f(t) = f_0 + \int_0^{\infty} F(t-s) \sum_n c_n \phi_n e^{-sD} ds$$

$$= f_0 + \int_0^{\infty} \frac{F(t-s)}{kT} f_0 \cdot (\mu D) e^{-sD} ds$$

(19) 式

$$P(t) = E_0 e^{i\omega t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega s}}{kT} (f_0 \cdot \mu D e^{-sD} \mu \cdot e) ds$$

$$= E_0 e^{i\omega t} \frac{1}{kT} (f_0 \cdot \mu \frac{D}{D+i\omega} \mu \cdot e)$$

ここで

$$(f_0 \cdot \mu \Lambda \mu \cdot e) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_{0\alpha} \mu_\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mu_\beta$$

$$\Lambda \equiv \frac{D}{D+i\omega}$$

を考慮して，$f_{0\alpha}$ を $(\alpha\alpha)$ 成分に持つ diagonal matrix を $\mathbf{f}_0$，すべての成分が 1 の matrix を $\mathbf{1}$ とすると

$$T_r(f_0 \mu \Lambda \mu \mathbf{1}) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_{0\alpha} \mu_\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mu_\beta 1_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} f_{0\alpha} \mu_\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mu_\beta$$

$$\therefore P(t) = E_0 e^{i\omega t} \frac{1}{kT} T_r(f_0 \mu \frac{D}{D+i\omega} \mu \mathbf{1})$$

同様に (26) 式も

$$\Phi(z) = T_r(f_0 \mu e^{-zD} \mu \mathbf{1})$$

§4 Special Model

前節までの一般論の特別な場合として，Glauber model，Tanaka etal 及び Kawasaki の model をあげることが出来る。前二者は分極を保存しない model であり，強誘電体などに使え，後者は分極を保存し，spin diffusion の model として使われる。

Glauber model は次の Master equation から出発する。

$$\frac{d}{dt} f(\sigma_1 \cdots \sigma_N t) = -\sum_j W_j(\sigma_j)\ f\ (\sigma_1 \cdots \sigma_N t)$$

$$+ \sum_j W_j(-\sigma_j)\ f\ (\sigma_1 \cdots -\sigma_j \cdots \sigma_N t)$$

$$W_j(\sigma_j) = \frac{\alpha}{2}(1-\sigma_j \tanh \beta E_j)$$

$$E_j = \sum_i J_{ij}\sigma_i + h$$

$W_j(\sigma_j)$ は transition probability で detailed balance の条件

$$\frac{W_j(\sigma_j)}{W_j(-\sigma_j)} = \frac{f_0(-\sigma_j)}{f_0(\sigma_j)}$$

を満し，α は熱浴との相互作用の強さを，h は適当な単位ではかった外場を表わす。これから Moment についての方程式を求めると

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n\rangle = -2\sum_{j=1}^{n}\langle \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n W_j(\sigma_j)\rangle$$

$$\langle \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n\rangle = \sum_{\{\sigma\}} \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n\ f\ (\sigma_1 \cdots \sigma_N t)$$

ここで $f(\sigma_1 \cdots \sigma_N\ t)$ 成分とする縦ベクトルを $\mathbf{f}$，moment を適当に並べた縦ベクトルを $\mathbf{m}$ とすると，適当に matrix $\mathbf{D}$, $\widetilde{\mathbf{D}}$ を定義することによって Master equation 及び Moment equation は

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{D}\mathbf{f}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\widetilde{\mathbf{D}}\,\mathbf{m}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f(++\cdots+,t) \\ \\ \\ f(--\cdots-,t) \end{pmatrix},\quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \langle\sigma_1\rangle \\ \vdots \\ \langle\sigma_N\rangle \\ \langle\sigma_1\sigma_2\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

f を m に変換する matrix T を

$$m = \sqrt{N}\, T f$$

で定義すると

$$T^{+}T = TT^{+} = 1$$

を満す T が存在することが示せる。故に

$$\widetilde{D} = TDT^{-1}$$

となる。更に Fourier 変換を行なうと

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j} \langle \sigma_j \rangle e^{iqr_j} \equiv \sigma(q) \quad \text{etc},$$

$$m_F = \overline{U}\, m\,,$$

$$\frac{\partial m_F}{\partial t} = -\widetilde{D}_F m_F\,, \quad \widetilde{D}_F = \overline{U}\widetilde{D}\overline{U}^{-1}$$

従って $\sigma(0)$ は一般に higher order moment の q 成分と couple し poly disperse relaxation になる。

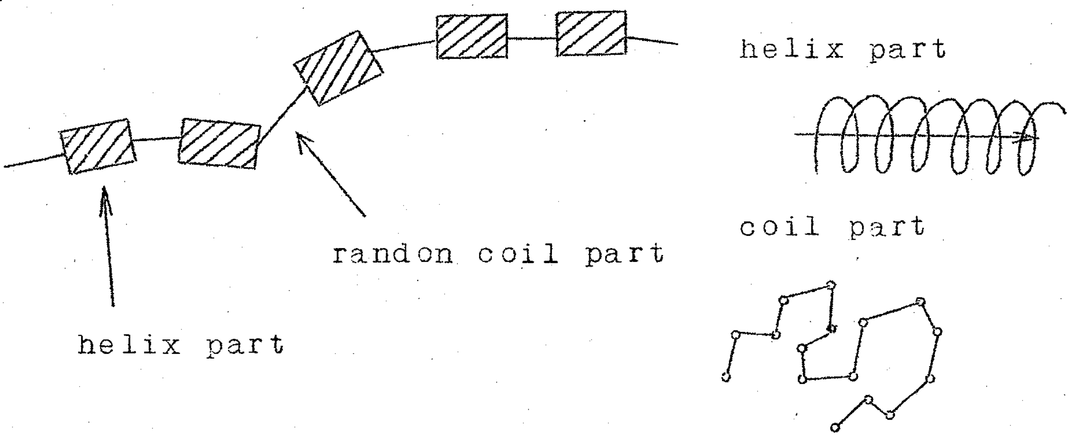
(Polarization $\propto \sum_j \langle \sigma_j \rangle \propto \sigma(0)$)

そこで相転移を起す model で exact に解けるものを作ることが出来ないかが問題となる。 nearest neighbour interaction の一次元 Glauber model は exact に解けるが，有限温度で相転移が起らず $\sigma(0)$ は $\sigma(q)$ 及び higher order moment と couple しない特別の場合であって mono-disperse である。

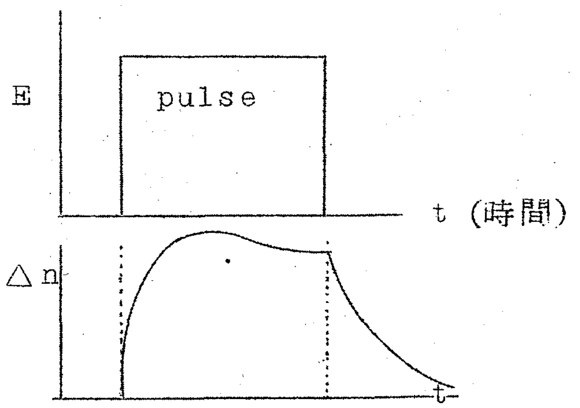
§5　一次元 Model

生体高分子の cooperative reaction には，一次元物質で " 相転移 " を起すものとして，helix − coil transition，DNA の denaturation などがある。ともに hydrogen bond の有無（或は helix 状態，coil 状

態）に Ising 変数を対応させた，一次元 Ising system としてとりあつかわれる。例えば後者は Montroll によれば interaction J が J＝A（T－T_0）の如く温度変化する Ising system としてあつかわれ，randomness を考慮に入れて melting curve（hydrogen bond の bond fraction の温度変化）を得ている。前者は schematic には図のような構造を持っており



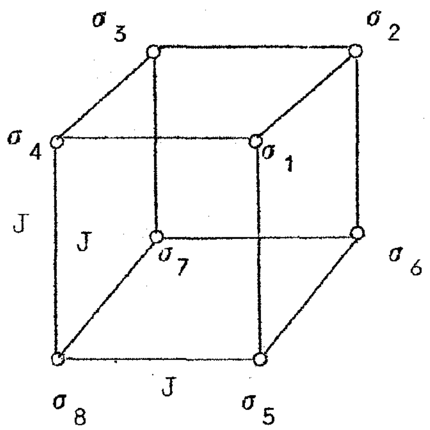
helix part は矢印方向に dipole moment を持っている。coil part は gaussian model など色々の方法で取扱われる。このような system について dynamical な性質に対して，T－jump relaxation（或る平衡状態から温度を急に変える），Dielectric relaxation，Kerr effect などが実験的に調べられている。誘電分散には helix part の orientation 及び helix part の coil part への変化など time dependence に異った二つの element があり新らたな問題である。又 coil part の取扱いも問題となる。Kerr 効果は電場Eによって生じた一軸性結晶 like の異方性によって光が複屈折する現象で，Eに平行及び直角な方向の屈折率 $n_{\parallel}$ ，$n_{\perp}$ の差 $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$ は次の図のようになる。そして△nの立上り及び減衰には



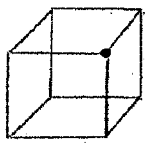
single relaxation からのずれがみられ，これは生体高分子の長さ及び温度によると思われる。すなわち，長さをそろえると single relaxation になるが，helix－coil 転移のおこる温度域では single relaxation からずれる傾向がある。

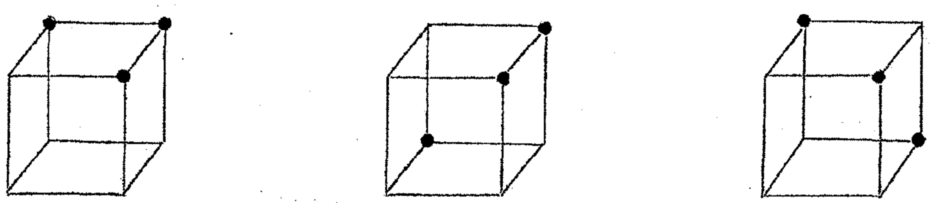
§6 有限個の syslem

有限個のスピンからなる system は，Nが非常に大きい system の持つ性質の傾向を調べる点で意味がある。polydisperse になるもので，relaxation time の分布の温度 dependence 及び粒子数 dependend がわかればよいが，はっきりした結論はない。例えば図のような cube を考える。



§4の方程式によって，Moment equation を立てると $\sigma(0)$ は空間的に一様なものとしか couple せず，結局 correlation の種類として図のようなものを考えればよい。

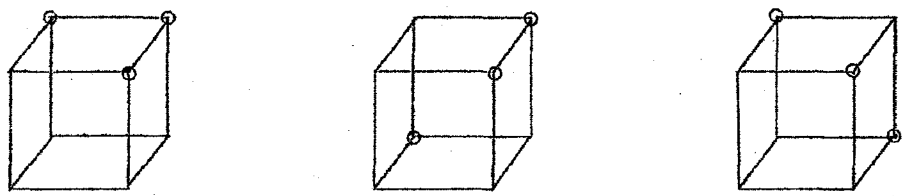
1体  $\langle\sigma_j\rangle = q$ （j に独立）

3体 

$\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle = t_1$ $\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_7\rangle = t_2$ $\langle\sigma_1\sigma_3\sigma_6\rangle = t_3$

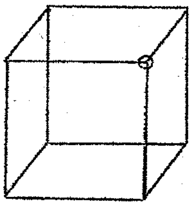
（ $\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle = \langle\sigma_2\sigma_3\sigma_4\rangle = \cdots$， 空間的一様の場合に当る。）

他も同様である。

5体 

s_1 s_2 s_3

（白円の spin は考えない。s_1 は t_1 の逆に当る。）

7体  p

従って，q，t_1，t_2，… p を成分とするベクトルを $\boldsymbol{\xi}$ とすると

$$-\frac{d}{d\alpha t}\boldsymbol{\xi} = M\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} = {}^{t}(q,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ p)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1-3x, & , & & -Y, & & & & \\ -(4X+Y), & 3-2X, & -2(X+Y), & -X, & & & & \\ -2X, & -(2X+Y), & 3(1-X), & -(2X+Y), & & & -Y, & \\ & -3X, & -6X, & 3, & & -3Y, & & \\ -Y, & -6X, & -(4X+3Y), & & 5-2X, & -(2X+Y), & -X, & \\ & -(4X+3Y), & -4X, & & -(2X+2Y), & 5-2X, & -2X, & \\ -Y, & & -3(2X+Y), & -3X, & -3X, & & 5-3X, & -Y \\ & -3Y, & & -Y, & -3(4Y+Y), & -6X, & & 7-3X \end{bmatrix}$$

但し，空白はゼロで

$$X = \frac{\gamma(\gamma^2+1)}{1+3\gamma^2} \qquad \gamma = \tanh\frac{J}{kT}$$

$$Y = -\frac{2\gamma^3}{1+3\gamma^2}$$

である。

Polarization は q に比例するので，一般に 8 つの relaxation time が現われる。高温の limit（ $T\to\infty$ ）をとると，X，$Y\to 0$ であるので，M は diagonal になり，

$$M = \begin{bmatrix} 1. & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & \ddots\ 5 & \\ 0 & & & \ddots\ 7 \end{bmatrix}$$

q は独立に relate する。低温の limit ($T \to 0$) では $X \to 1/2$, $Y \to -1/2$ で, static な方程式 $M\xi = 0$ は $q = t_1 = t_2 = \cdots = p = 1$ の解を持つ。高温から温度を下げるに従って relaxation mode は couple しだし poliydisperse になるのであるが，それがどの程度なのであるかは，まだよく分っていない。しかし relaxation time の一つは絶対 0 度に近づくにつれて無限大になることがわかる。すなわち

$$|M| = (1-3X-Y)\begin{vmatrix} 1 & \\ 3 & \\ \vdots & M'_{ij} \\ 5 & \\ \vdots & \\ 7 & \end{vmatrix}$$

但し，M の matrix element を M_{ij} とすると

$$M'_{ij} = M_{ij} \quad (j \neq 1)$$

$$1-3X-Y = \frac{(1-\gamma)^3}{1+3\gamma^2} \geq 0$$

となり，$T \to 0$ のとき $1-3X-Y \to 0$，従って $|M| \to 0$ となるからである。ここで問題は他の mode のふるまいであるが，一つの relaxation time のみが大きくなるのか，他の relaxation time もひきづられて大きくなるのか，二つの可能性がある。

又このような relaxation time の分布の温度変化と共に，粒子数 N に対する変化にも興味がある。